Potenciación. Radicación. Logaritmos.

Principales propiedades de la potenciación

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. **Producto de potencias de igual base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

2. **Cociente de potencias de igual base**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5$$

3. **Potencia de una potencia**

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplo:

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

4. **Potencia de un producto**

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Ejemplo:

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

5. **Potencia de un cociente**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

6. **Exponente cero**

$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0$$

Ejemplo:

$$15^0 = 1$$

7. **Exponente uno**

$$a^1 = a$$

Ejemplo:

$$8^1 = 8$$

8. **Exponente negativo**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0$$

Ejemplo:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

9. **Exponente fraccionario**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a > 0$$

Ejemplo:

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8$$

10. **Potencias de base uno**

$$1^n = 1$$

Ejemplo:

$$1^{1000} = 1$$

11. **Potencias de base cero**

$$0^n = 0, \qquad n > 0$$

Ejemplo:

$$0^8 = 0$$

12. **Potencias de base negativa**

Si el exponente es par,

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

Si el exponente es impar,

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

Ejemplos:

$$(-3)^4 = 81, \qquad (-3)^5 = -243$$

Tabla resumen

Propiedad	**Expresión**
Producto de potencias de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de igual base	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$
Potencia de un cociente	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
Exponente cero	$a^0 = 1$
Exponente uno	$a^1 = a$
Exponente negativo	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
Exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
Base uno	$1^n = 1$
Base cero	$0^n = 0,\ n > 0$
Base negativa	$(-a)^n$ depende de la paridad de n

Principales propiedades de la radicación

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$, $b \geq 0$, $b \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

1. **Producto de radicales con igual índice**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

2. **Cociente de radicales con igual índice**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{36} = 6$$

3. **Raíz de una potencia**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

4. **Potencia de un radical**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

5. **Radical de un radical**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

6. **Extracción de factores**

Si

$$a = b^n c,$$

entonces

$$\sqrt[n]{a} = b\sqrt[n]{c}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

7. **Introducción de factores**

$$k\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n a}$$

Ejemplo:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{45}$$

8. **Raíz de índice uno**

$$\sqrt[1]{a} = a$$

Ejemplo:

$$\sqrt[1]{12} = 12$$

9. **Raíz de índice par**

   Para índices pares,

$$\sqrt[n]{a} \geq 0$$

   Ejemplo:

$$\sqrt{25} = 5$$

   No es correcto escribir

$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

10. **Relación entre radicación y potenciación**

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$$

Tabla resumen

Propiedad	**Expresión**
Producto de radicales	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
Cociente de radicales	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
Potencia de un radical	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Radical de un radical	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
Extracción de factores	$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$
Introducción de factores	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
Raíz de índice uno	$\sqrt[1]{a} = a$
Relación con la potenciación	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Principales propiedades de los logaritmos

Sean $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ y $m, n \in \mathbb{R}$.

1. **Definición de logaritmo**

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Ejemplo

$$\log_2 8 = 3 \qquad \iff \qquad 2^3 = 8$$

2. **Logaritmo del producto**

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$$

Ejemplo

$$\log_2(8{\cdot}4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$$

3. **Logaritmo del cociente**

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Ejemplo

$$\log_3\left(\frac{81}{9}\right) = 4 - 2 = 2$$

4. **Logaritmo de una potencia**

$$\boxed{\log_a(x^n) = n \log_a x}$$

Ejemplo

$$\log_5(25^3) = 3 \log_5 25 = 3 \cdot 2 = 6$$

5. **Logaritmo de una raíz**

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

Ejemplo

$$\log_2 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{3}{2}$$

6. **Logaritmo de la base**

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Ejemplo

$$\log_7 7 = 1$$

7. **Logaritmo de uno**

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Ejemplo

$$\log_5 1 = 0$$

8. **Inversa del logaritmo**

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

Ejemplo

$$3^{\log_3 18} = 18$$

9. **Logaritmo de una potencia de la base**

$$\boxed{\log_a(a^x) = x}$$

Ejemplo

$$\log_4(4^5) = 5$$

10. **Cambio de base**

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

o también

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Ejemplo

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2}$$

Tabla resumen

Propiedad	**Expresión**
Producto	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
Cociente	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
Potencia	$\log_a(x^n) = n\log_a x$
Raíz	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$
Logaritmo de la base	$\log_a a = 1$
Logaritmo de uno	$\log_a 1 = 0$
Inversa	$a^{\log_a x} = x$
Potencia de la base	$\log_a(a^x) = x$
Cambio de base	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Estas propiedades constituyen el conjunto fundamental que todo estudiante debe dominar antes de abordar ecuaciones logarítmicas, funciones logarítmicas y exponenciales, temas habituales en Matemática Básica y Cálculo I.